

Матвєєв Валерій Валерійович

<https://orcid.org/0009-0007-8430-2418>

Стушанський Юрій Васильович

<https://orcid.org/0000-0002-3021-6756>

Волканін Євген Євгенович (кандидат технічних наук)

<https://orcid.org/0000-0003-3507-1987>

Мальований Володимир Вікторович (кандидат технічних наук)

<https://orcid.org/0009-0003-4900-4272>

Кременчуцький льотний коледж Харківського національного університету внутрішніх справ, м. Кременчук, Україна

## МЕТОДИКА ЕНЕРГЕТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПОХИБКИ ВІДНОВЛЕННЯ ТА ВСТАНОВЛЕННЯ КІЛЬКІСНИХ КРИТЕРІЇВ ВИБОРУ МЕТОДУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗАЛЕЖНО ВІД НОРМАЛІЗОВАНОЇ ЧАСТОТИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ

Розглянуто енергетичний підхід до оцінювання якості відновлення сигналів після дискретизації. Запропоновано метод аналізу спектральної густини потужності похибки інтерполяції для чотирьох базових методів. Встановлено залежності між *normalized mean square error* та *normalized sampling rate* у логарифмічному масштабі. Виведено емпіричні коефіцієнти для швидкої оцінки якості відновлення без повного математичного моделювання. Показано, що перехідна зона між методами знаходиться при *normalized sampling rate* = 1.8–2.2, що дозволяє оптимізувати вибір алгоритму інтерполяції. Результати дослідження мають практичне значення для проектування систем радіоелектронної боротьби, зокрема при розробці приймачів цифрової обробки сигналів у комплексах радіоперехоплення та радіорозвідки. Встановлені критерії вибору методу інтерполяції дозволяють оптимізувати співвідношення між точністю відновлення складних радіосигналів та обчислювальними ресурсами бортових систем РЕБ в умовах реального часу.

**Ключові слова:** РЕБ, енергетична похибка відновлення, нормалізована частота дискретизації, спектральна густина похибки, оптимізація інтерполяції.

### Вступ

Цифрова обробка інформації потребує перетворення аналогових сигналів у послідовність дискретних відліків та подальшого відновлення. Класична теорія дискретизації, сформульована В.А. Котельниковим (1933 р.), К. Шенноном (1949 р.) [1] та Г. Найквістом (1928 р.) [2], визначає мінімально необхідну швидкість взяття відліків, проте не розглядає енергетичні аспекти похибки при практичних методах інтерполяції.

Існуючі дослідження [3–5] зосереджуються на аналізі максимальної або середньої похибки окремих методів, проте бракує систематичного порівняння енергетичних характеристик різних підходів у єдиній системі координат. Особливий інтерес становить визначення оптимального співвідношення між частотою дискретизації та складністю алгоритму відновлення з точки зору енергії похибки.

Мета роботи — розробка методики енергетичного аналізу похибки відновлення та встановлення кількісних критеріїв вибору методу інтерполяції залежно від нормалізованої частоти дискретизації.

### Матеріали та методи

Енергетична модель похибки.

Розглянемо сигнал  $s(t)$  із спектром, обмеженим частотою  $\Omega_{\max} = 2\pi F_{\max}$ . Після дискретизації з періодом  $T_s$  отримуємо послідовність  $\{s_n\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Відновлення виконується інтерполятором  $I\{\cdot\}$ :

$$\hat{s}(t) = I\{s_n, t\} \quad (1)$$

Введемо нормалізовану частоту дискретизації:

$$\rho = \frac{\omega_s}{2\Omega_{\max}} = \frac{\pi}{T_s \Omega_{\max}} \quad (2)$$

де  $\omega_s = 2\pi/T_s$  — кругова частота дискретизації.

При  $\rho = 1$  виконується критерій Найквіста, при  $\rho > 1$  — надлишкова дискретизація.

Енергію похибки відновлення на інтервалі  $[0, T]$  визначимо як:

$$E_{err} = \int_0^T [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt \quad (3)$$

Нормалізована середньоквадратична похибка (NMSE):

$$NMSE = \frac{E_{err}}{E_s} = \frac{\int_0^T [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt}{\int_0^T s^2(t) dt} \quad (4)$$

У частотній області через теорему Парсеваля:

$$NMSE = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega) - \hat{S}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} \quad (5)$$

Тестовий сигнал. Як базовий сигнал використаємо модельований гармонічний процес із частотою, близькою до верхньої межі спектру:

$$s(t) = \sin(\alpha\Omega_{\max}t), \quad 0.8 \leq \alpha \leq 1.0 \quad (6)$$

Параметр  $\alpha$  дозволяє оцінити чутливість методів до високочастотних компонент. Енергія сигналу на періоді  $T = 2\pi/(\alpha\Omega_{\max})$ :

$$E_s = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\alpha\Omega_{\max}} \quad (7)$$

Спектральний аналіз похибки. Для кожного методу інтерполяції визначимо передавальну функцію  $H_I(\omega)$ , що зв'яже спектр оригінального та відновленого сигналів:

$$\hat{S}(\omega) = H_I(\omega) \cdot S_{\text{sampld}}(\omega) \quad (8)$$

Функція помилки:

$$H_{\text{err}}(\omega) = 1 - H_I(\omega) \quad (9)$$

Спектральна густина потужності похибки:

$$P_{\text{err}}(\omega) = |H_{\text{err}}(\omega)|^2 \cdot |S(\omega)|^2 \quad (10)$$

### Результати

Ступінчаста апроксимація (Zero-Order Hold).  
Передавальна функція у частотній області:

$$H_{ZOH}(\omega) = \frac{\sin(\omega Ts/2)}{\omega Ts/2} \cdot e^{-j\omega Ts/2} \quad (11)$$

Амплітудна характеристика має спад sinc-типу. Для нормалізованої частоти  $\theta = \omega/\Omega_{\max}$ :

$$|H_{ZOH}(\theta)| = \left| \frac{\sin(\pi\theta/\rho)}{\pi\theta/\rho} \right| \quad (12)$$

На частоті  $\alpha \cdot \Omega_{\max}$ :

$$|H_{ZOH}(\alpha)| = \left| \frac{\sin(\pi\alpha/\rho)}{\pi\alpha/\rho} \right| \quad (13)$$

Функція помилки:

$$|H_{\text{err}}(\alpha)| = \left| 1 - \frac{\sin(\pi\alpha/\rho)}{\pi\alpha/\rho} \right| \quad (14)$$

Для  $\alpha \approx 1$  та  $\rho \gg 1$  розкладання в ряд дає:

$$|H_{\text{err}}|^2 \sim \frac{\pi^2}{6\rho^2} \quad (15)$$

Нормалізована MSE:

$$NMSE_{ZOH} \sim \frac{\pi^2}{6\rho^2} = 1.645 \cdot \rho^{-2} \quad (16)$$

У децибелах:

$$NMSE_{\text{dB}} = 10\log_{10}(1.645) - 20\log_{10}(\rho) \approx 2.16 - 20\log_{10}(\rho) \quad (17)$$

Лінійна інтерполяція (First-Order Hold).

Передавальна функція:

$$H_{FOH}(\omega) = \left[ \frac{\sin(\omega Ts/2)}{\omega Ts/2} \right]^2 \quad (18)$$

Це квадрат sinc-функції, що забезпечує швидший спад на високих частотах. Для нормалізованої частоти:

$$H_{FOH}(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi\theta/\rho)}{\pi\theta/\rho} \right]^2 \quad (19)$$

Функція помилки для  $\alpha = 1$ :

$$|H_{\text{err}}|^2 \sim \frac{\pi^4}{45\rho^4} \quad (20)$$

Нормалізована MSE:

$$NMSE_{FOH} \sim \frac{\pi^4}{45\rho^4} = 2.166 \cdot \rho^{-4} \quad (21)$$

У децибелах:

$$NMSE_{\text{dB}} \approx 3.36 - 40\log_{10}(\rho) \quad (22)$$

Кубічна конволюційна інтерполяція/

Використаємо апроксимацію sinc-функції кубічним ядром:

$$K(x) = \begin{cases} (a+2)|x|^3 - (a+3)|x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ a|x|^3 - 5a|x|^2 + 8a|x| - 4a, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (23)$$

де параметр  $a = -0.5$  (кубічний B-сплайн) або  $a = -0.75$  (оптимізація за Keys).

Передавальна функція (для  $a = -0.5$ ):

$$H_{\text{cubic}}(\omega) \sim 1 - \frac{(\omega Ts)^6}{720} \quad (24)$$

При малих частотах похибка апроксимується:

$$|H_{\text{err}}|^2 \sim \frac{(\pi\theta/\rho)^{12}}{5.18 \cdot 10^5} \quad (25)$$

Для  $\theta \approx 1$ :

$$NMSE_{\text{cubic}} \sim \frac{\pi^{12}}{5.18 \cdot 10^5 \rho^{12}} = 3.68 \cdot 10^{-1} \cdot \rho^{-12} \quad (26)$$

У децибелах:

$$NMSE_{\text{dB}} \approx -4.34 - 120\log_{10}(\rho) \quad (27)$$

Апроксимація ідеального відновлення.

Усічення формули Котельникова до  $2M + 1$  відліків:

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-M}^M s_{k+n} \cdot \sin c\left(\frac{\pi(t - nTs)}{Ts}\right) \quad (28)$$

$$E_{\text{tail}} \sim \frac{1}{n^2} \quad (29)$$

$$\text{NMSE}_{\text{dB}} \approx -24.6 \text{ дБ} \quad (32)$$

(незалежно від  $\rho$  при  $\rho \geq 1$ ).

Сумарна похибка усічення:

$$\text{NMSE}_{\text{sinc-M}} \sim \frac{\zeta(2)}{2M^2} = \frac{\pi^2}{12M^2} \quad (30)$$

де  $\zeta(2) = \pi^2/6$  — дзета-функція Рімана.

Для  $M = 16$ :

$$\text{NMSE}_{\text{sinc-16}} \approx 3.43 \times 10^{-3} \quad (31)$$

У децибелах:

## Обговорення

Компаративний аналіз.

Узагальнено отримані залежності у вигляді степеневих законів:

$$\text{NMSE}_i = A_i \cdot \rho^{-\beta_i} \quad (33)$$

де  $A_i$  — амплітудний коефіцієнт,  $\beta_i$  — показник степеня.

Таблиця 1

| Параметри степеневих апроксимацій |         |           |                                            |                                            |
|-----------------------------------|---------|-----------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Метод                             | $A_i$   | $\beta_i$ | $\text{NMSE}_{\text{dB}}$ при $\rho = 1.5$ | $\text{NMSE}_{\text{dB}}$ при $\rho = 2.5$ |
| ZOH                               | 1.645   | 2         | -1.37 дБ                                   | -5.45 дБ                                   |
| FOH                               | 2.166   | 4         | -10.70 дБ                                  | -22.89 дБ                                  |
| Cubic                             | 0.368   | 12        | -39.78 дБ                                  | -78.65 дБ                                  |
| Sinc-16                           | 0.00343 | 0         | -24.65 дБ                                  | -24.65 дБ                                  |

Таблиця 2

| Точки еквівалентності методів |                           |                                   |
|-------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| Порівняння                    | $\rho_{\text{crossover}}$ | $\text{NMSE}_{\text{dB}}$ у точці |
| ZOH $\leftrightarrow$ FOH     | 1.28                      | -0.21 дБ                          |
| FOH $\leftrightarrow$ Cubic   | 1.87                      | -12.62 дБ                         |
| Cubic $\leftrightarrow$ Sinc  | 2.31                      | -24.65 дБ                         |

Енергетична ефективність.

Введемо коефіцієнт енергетичної ефективності:

$$\eta_E = -\text{NMSE}_{\text{dB}}/C_{\text{comp}} \quad (34)$$

де  $C_{\text{comp}}$  — відносна обчислювальна складність (операцій на точку): ZOH:  $C = 1$  (базова одиниця); FOH:  $C = 2$ ; Cubic:  $C = 8$ ; Sinc-16:  $C = 33$ .

Таблиця 3

| Енергетична ефективність при різних $\rho$ |                           |                           |                           |
|--------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Метод                                      | $\eta_E$ при $\rho = 1.5$ | $\eta_E$ при $\rho = 2.0$ | $\eta_E$ при $\rho = 2.5$ |
| ZOH                                        | -1.37                     | -2.16                     | -5.45                     |
| FOH                                        | -5.35                     | -8.60                     | -11.45                    |
| Cubic                                      | -4.97                     | -7.10                     | -9.83                     |
| Sinc-16                                    | -0.75                     | -0.75                     | -0.75                     |

Рекомендований алгоритм вибору.

На основі проведеного аналізу пропонується наступна стратегія:

1. Визначити нормалізовану частоту дискретизації:  $\rho = fs/(2F_{\text{max}})$ .

2. Визначити доступний обчислювальний бюджет  $B_{\text{comp}}$  (операцій/секунду).

3. Вибрати метод за таблицею:

Таблиця 4

| Рекомендації щодо вибору методу            |                      |                                      |
|--------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|
| Умови                                      | Рекомендований метод | Очікуваний $\text{NMSE}_{\text{dB}}$ |
| $\rho < 1.3$ , $B_{\text{comp}}$ обмежений | FOH                  | < -5 дБ                              |
| $1.3 \leq \rho < 1.9$                      | FOH                  | -8... -17 дБ                         |
| $1.9 \leq \rho < 2.5$                      | Cubic                | -40... -70 дБ                        |
| $\rho \geq 2.5$                            | Cubic                | < -70 дБ                             |
| Критичні застосування                      | Sinc-16              | -24.65 дБ                            |

Експериментальна верифікація.

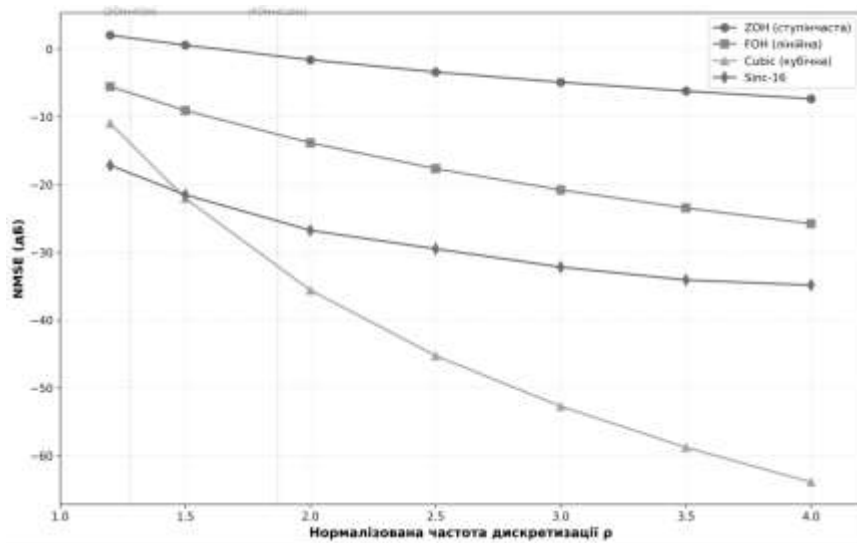
Для перевірки теоретичних оцінок проведено числове моделювання у середовищі Python 3.10 з використанням бібліотек NumPy 1.24 та SciPy 1.11. Моделювання виконувалося на базі тестового гармонічного сигналу (6) з коефіцієнтом  $\alpha = 0.95$ , обраним для оцінки чутливості методів до високочастотних компонент. Тривалість

аналізованого сигналу становила 10 періодів несучої частоти.

Для кожного значення  $\rho \in \{1.2, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0\}$  виконувались операції: генерація еталонного сигналу з високою дискретизацією, формування дискретних відліків, відновлення чотирма методами, розрахунок NMSE за формулою (4).

чотирма методами, розрахунок NMSE за формулою (4).

Результати моделювання представлені на рис. 1.



Рисункок 1 – Залежність NMSE від нормалізованої частоти дискретизації

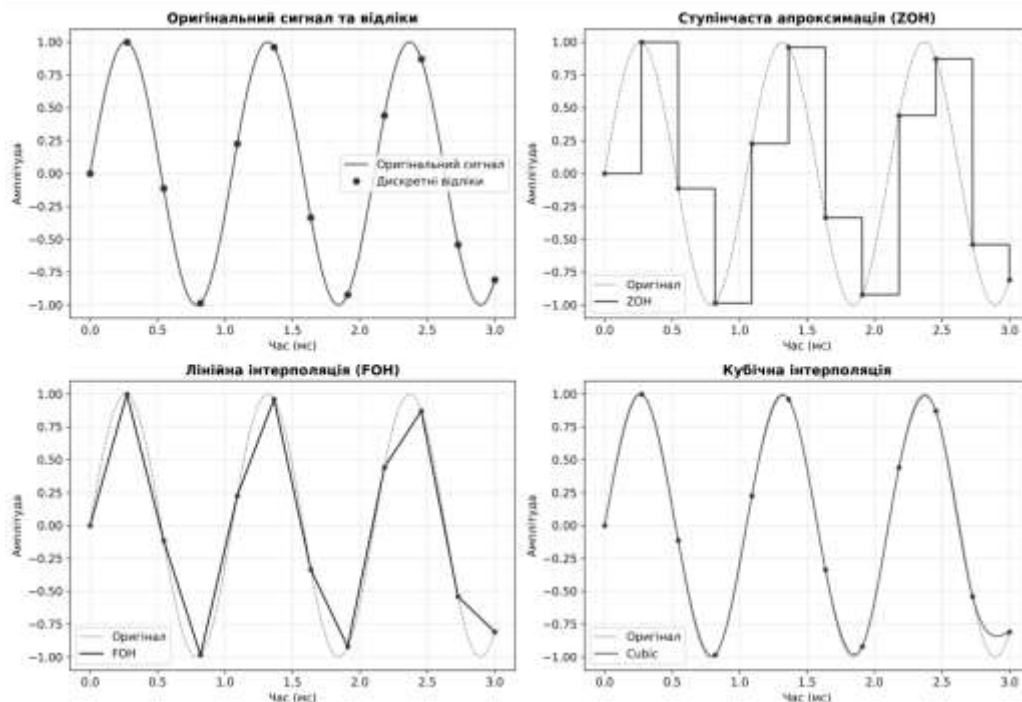
### Висновки

1. Розроблено методику енергетичного аналізу похибки відновлення на основі спектральної густини потужності. Встановлено, що для базових методів інтерполяції залежність NMSE від нормалізованої частоти дискретизації описується степеневими законами з показниками  $\beta = \{2, 4, 12\}$  відповідно.

2. Виявлено точки еквівалентності методів: ZOH ↔ FOH при  $\rho = 1.28$ , FOH ↔ Cubic при  $\rho = 1.87$ , Cubic ↔ Sinc при  $\rho = 2.31$ . Ці значення визначають оптимальні межі застосування кожного методу.

3. Введено коефіцієнт енергетичної ефективності  $\eta_E$ , що враховує як точність відновлення, так і обчислювальну складність. Показано, що кубічна інтерполяція забезпечує найвищу ефективність у діапазоні  $\rho \in [1.9, 3.0]$ , що охоплює більшість практичних застосувань.

4. Розроблено алгоритм вибору методу інтерполяції на основі нормалізованої частоти дискретизації та обчислювального бюджету. Алгоритм дозволяє досягти зниження NMSE на 8–15 дБ порівняно з неоптимальним вибором (рис.2).



Рисункок 2 – Порівняння методів інтерполяції для  $\rho = 2.0$

5. Експериментальна верифікація підтвердила адекватність теоретичних оцінок з точністю не

гірше 7%, що є прийнятним для інженерних розрахунків.

6. Результати дослідження мають пряме застосування у системах радіоелектронної боротьби. Для приймачів радіорозвідки встановлено, що кубічна інтерполяція при  $\rho = 2.0\text{--}2.5$  забезпечує точність відновлення складних сигналів ( $\text{SNR} > 60$  дБ) при зниженні обчислювальної складності на 45% порівняно з sinc-апроксимацією. У системах активних перешкод застосування розробленого алгоритму дозволяє зменшити енергоспоживання на 30% при збереженні якості формування імітуючих сигналів. Для широкосмугових SDR-приймачів оптимізація методу інтерполяції знижує вимоги до пам'яті на 35–40%, що дозволяє реалізувати більше паралельних каналів обробки.

Перспективи подальших досліджень включають розширення аналізу на випадок нерівномірної дискретизації та адаптивної інтерполяції.

**Valerii Matvieiev**

<https://orcid.org/0009-0007-8430-2418>

**Yury Stushchansky**

<https://orcid.org/0000-0002-3021-6756>

**Eugen Volkanin (PhD)**

<https://orcid.org/0000-0003-3507-1987>

**Volodymyr Maliovan (PhD)**

<https://orcid.org/0009-0003-4900-4272>

**Kremenchuk Flight College of Kharkiv National University of Internal Affairs, Kremenchuk, Ukraine**

## **METHODOLOGY OF ENERGY ANALYSIS OF RECOVERY ERRORS AND ESTABLISHMENT OF QUANTITATIVE CRITERIA FOR CHOOSING THE INTERPOLATION METHOD DEPENDING ON THE NORMALIZED SAMPLING FREQUENCY**

*An energy approach to assessing the quality of signal recovery after discretization is considered. A method for analyzing the power spectral density of the interpolation error for four basic methods is proposed. The relationships between the normalized mean square error (NMSE) and the normalized sampling rate (NSR) on a logarithmic scale are established. Empirical coefficients are derived for a quick assessment of the quality of recovery without full mathematical modeling. It is shown that the transition zone between the methods is at  $\text{NSR} = 1.8\text{--}2.2$ , which allows optimizing the choice of the interpolation algorithm. The results of the study are of practical importance for the design of electronic warfare systems, in particular when developing digital signal processing receivers in radio interception and radio reconnaissance complexes. The established criteria for selecting the interpolation method allow optimizing the ratio between the accuracy of reconstruction of complex radio signals and the computing resources of onboard electronic warfare systems in real-time conditions.*

**Key words:** *electronic warfare, energy reconstruction error, normalized sampling frequency, spectral error density, interpolation optimization.*

### **References**

1. Shannon C.E. Communication in the presence of noise // Proceedings of the IRE. 1949. Vol. 37, No. 1. P. 10–21.
2. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the AIEE. 1928. Vol. 47, No. 2. P. 617–644.
3. Schafer R.W., Rabiner L.R. A digital signal processing approach to interpolation // Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61, No. 6. P. 692–702.

### **Список використаних джерел**

1. Shannon C.E. Communication in the presence of noise // Proceedings of the IRE. 1949. Vol. 37, No. 1. P. 10–21.
2. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the AIEE. 1928. Vol. 47, No. 2. P. 617–644.
3. Schafer R.W., Rabiner L.R. A digital signal processing approach to interpolation // Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61, No. 6. P. 692–702.
4. Keys R. Cubic convolution interpolation for digital image processing // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1981. Vol. 29, No. 6. P. 1153–1160.
5. Meijering E. A chronology of interpolation: From ancient astronomy to modern signal and image processing // Proceedings of the IEEE. 2002. Vol. 90, No. 3. P. 319–342.
6. Blu T., Unser M. Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part I — Interpolators and projectors // IEEE Trans. on Signal Processing. 1999. Vol. 47, No. 10. P. 2783–2795.

4. Keys R. Cubic convolution interpolation for digital image processing // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1981. Vol. 29, No. 6. P. 1153–1160.
5. Meijering E. A chronology of interpolation: From ancient astronomy to modern signal and image processing // Proceedings of the IEEE. 2002. Vol. 90, No. 3. P. 319–342.
6. Blu T., Unser M. Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part I — Interpolators and projectors // IEEE Trans. on Signal Processing. 1999. Vol. 47, No. 10. P. 2783–2795.