DOI 10.33099/2786-7714-2025-1-8-100-104

УДК 681.324

[1]**Барабаш Олег Володимирович** (доктор технічних наук, професор)
https://orcid.org/0000-0003-1715-0761
[1]**Макарчук Андрій Валентинович**
https://orcid.org/0000-0002-6422-7488
[2]**Білявський Богдан Анатолійович** (кандидат військових наук)
https://orcid.org/0009-0006-9036-7229
[2]**Ткачов Володимир Васильович** (кандидат військових наук, професор)
https://orcid.org/0000-0001-8957-2723

[1]***Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна***
[2]***Національний університет оборони України, Київ, Україна***

МЕТОД НАБЛИЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ АНАЛОГАМИ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ РАДІОЛОКАЦІЙНИХ СТАНЦІЙ РАДІОТЕХНІЧНИМИ ЗАСОБАМИ РОЗВІДКИ

В роботі багатьох видів систем та механізмів критичною є цифрова обробка сигналів, в межах якої сформульовано ряд задач, які тією чи іншою мірою можуть вважатися класичними. До таких задач сміливо можна віднести задачу наближення (або відновлення) сигналів, під якою нерідко розуміють наближення функції, що описує досліджуваний сигнал, знаючи його величину в конкретні моменти часу. Зараз математичний апарат, призначений для цього, значною мірою розроблений, однак, існує ряд аспектів фундаментального характеру, які зазвичай розглядаються виключно з теоретичної точки зору, без урахування технічної та прикладної складової, або не розглядаються взагалі. Наявність такої обмеженості результатів є досить критичною, оскільки в деяких ситуаціях це може ускладнити, а то й взагалі унеможливити досягнення необхідної точності наближення сигналів, що, в свою чергу, може стати причиною ряду інших небажаних ефектів. Один із аспектів, описаних вище, є вплив використання того чи іншого методу чисельного інтегрування, який використовується при побудові дискретного варіанту того чи іншого інструменту, широко вживаного в обробці сигналів. Така ситуація зустрічається, наприклад, при побудові інтерполяційних аналогів операторів, породжених підсумовуванням рядів Фур'є, які останнім часом викликають все більший інтерес, в тому числі, й в контексті задачі наближення сигналів, що широко використовується для дослідження випромінювання радіолокаційних станцій радіотехнічними засобами розвідки.

В даній роботі робиться спроба вирішити цю проблему, порівнюючи побудову інтерполяційних аналогів оператора Фейєра за допомогою чисельного його інтегрування методом прямокутників, який в даному ракурсі є класичним, та методом Сімпсона. В ході дослідження продемонстровано, який вигляд мають інтерполяційні аналоги в обох випадках, та наглядно показано, який із них дає кращу точність при наближенні сигналу на основі його дискретного варіанта, що вивчається та узагальнюється радіотехнічними засобами розвідки.

Ключові слова: *інтерполяція, ряди Фур'є, підсумовування рядів Фур'є, оператори, оператор Фейєра, чисельне інтегрування, метод прямокутників, метод Сімпсона, наближення, цифрова обробка сигналів.*

Вступ

Використання інтерполяційних поліномів по типу поліномів Лагранжа [1] в задачі відновлення цифрових сигналів [2-4] є досить поширеною практикою. Однак, як відомо, дані підходи мають ряд особливостей, із-за яких якість наближення сигналу по його цифровому аналогу може бути досить неякісним. Зараз же для вирішення даної задачі все частіше розглядають інтерполяційні аналоги операторів, породжених лінійним підсумовуванням рядів Фур'є [5-7]. Але у всіх роботах, де ці аналоги описані та досліджені, вони будуються за рахунок чисельного інтегрування [1] методом прямокутників, який, як відомо, в загальному випадку не є досить точним. В силу цього виникає необхідність в розгляді інших, більш точних методів чисельного інтегрування з ціллю побудови вище згаданих інтерполяційних аналогів.

Одним із методів, який пропонують в ряді джерел, є так званий метод Сімпсона, який дещо складніший в реалізації, але є точнішим при використанні. Головною метою даної роботи є порівняти інтерполяційний аналог оператора

Фейєра [7] побудований стандартним підходом, наприклад, у [7], та його альтернативний варіант,

$$\sigma(x)=\sigma(f,x)=\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right)^2 dt, \quad (1)$$

побудований за допомогою чисельного інтегрування (1) за допомогою методу Сімпсона.

Розгляд задачі наближення сигналів та їй суміжні розглядаються багатьма авторами і досить давно. Так, наприклад, в [4] задача наближення сигналів по їх цифровому вигляді сформульована математично. В роботах, як от в [3, 7, 8, 12], показано, як цю та ряд суміжних задач в такому її вигляді можна використовувати в ситуаціях більш прикладного характеру. Однак, не менш важливою є й теоретична сторона цих питань, розгляд якої можна знайти, наприклад, у [5, 6]. Але навіть з урахуванням такого різноманіття досліджень все ще є питання, пов'язані зі специфікою побудови інтерполяційних аналогів операторів, які використовуються в обробці цифрових сигналів. Так, наприклад, у всіх роботах, де інтерполяційні аналоги вводяться, припускається, що вони будуються за допомогою чисельного інтегрування методом прямокутників, але ніде не розглядаються інтерполяційні аналоги, побудовані шляхом використання інших, більш точних методів чисельного інтегрування. А даний фактор є досить важливим, оскільки неврахування його може привести до погіршення якості вирішення поставлених задач. Метод наближення цифрових сигналів інтерполяційними аналогами операторів, що розглядається до використання для дослідження випромінювання радіолокаційних станцій радіотехнічними засобами розвідки ще не пропонувався.

Мета дослідження полягає в порівнянні методу прямокутників та методу Сімпсона у випадку побудови інтерполяційних аналогів оператора Фейєра, та визначити метод який дозволяє побудувати наближення, значно точніше для дослідження випромінювання радіолокаційних станцій радіотехнічними засобами розвідки.

Матеріали та методи

В даній роботі робиться спроба вирішити цю проблему, порівнюючи побудову інтерполяційних аналогів оператора Фейєра за допомогою чисельного його інтегрування методом прямокутників, який в даному ракурсі є класичним, та методом Сімпсона.

Результати

Розглянемо оператор Фейєра (2). Як зазвичай описується в літературі, його інтерполяційним аналогом можна вважати суму виду

$$\tilde{\sigma}(x)=\tilde{\sigma}(f,x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_k-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_k-x)}\right)^2. \quad (2)$$

Як було сказано вище, формулу (3) можна отримати за допомогою методу лівих прямокутників при інтегруванні (1). Однак, окрім цього методу є ще й інші, які є більш точними. Так, наприклад, серед популярних методів чисельного інтегрування є метод Сімпсона, який схематично може бути записаний як

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4\sum_{\text{непарні } i} f(x_i)+2\sum_{\text{парні } i} f(x_i)+f(x_n)\right) \quad (3)$$

та має кращу точність. Відповідно, застосувавши (4) до (1), ми зможемо отримати новий метод побудови інтерполяційного аналога оператора Фейєра, який матиме вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(x)=\tilde{\sigma}(f,x)=\\ =\frac{1}{3\pi(n-1)}\left(\begin{array}{l}2\sum\limits_{\text{непарні } i} f(x_i)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_i-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}\right)^2+\\ +\sum\limits_{\text{парні } i} f(x_i)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_i-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_i-x)}\right)^2\end{array}\right)+\\ +\frac{1}{6\pi}\left(\begin{array}{l}f(0)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2+\\ +f(2\pi)\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(2\pi-x)}{\sin\frac{1}{2}(2\pi-x)}\right)^2\end{array}\right).\end{aligned} \quad (4)$$

Приклади застосування інтерполяційних аналогів.

Розглянемо кілька прикладів застосування інтерполяційних аналогів (2) та (4) й порівняємо їх якість наближення сигналів.

Приклад 1.

Нехай цифровий сигнал представлений послідовністю чисел

$$\frac{\sin\frac{2\pi k}{99}}{\sqrt{\left(\frac{2\pi k}{99}-\pi\right)^2+1}}+\frac{\cos\frac{4\pi k}{99}}{\sqrt[4]{\left(\frac{2\pi k}{99}-\pi\right)^4+1}}, k=0,1,2,...,99. \quad (5)$$

Фактично, це є табульованим варіантом сигналу, що описується функцією

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{(x-\pi)^2+1}}+\frac{\cos 2x}{\sqrt[4]{(x-\pi)^4+1}}, x\in[0,2\pi].$$

Використовуючи (2) та (4) до послідовності (5), отримаємо наближення, зображене на рис. 1.

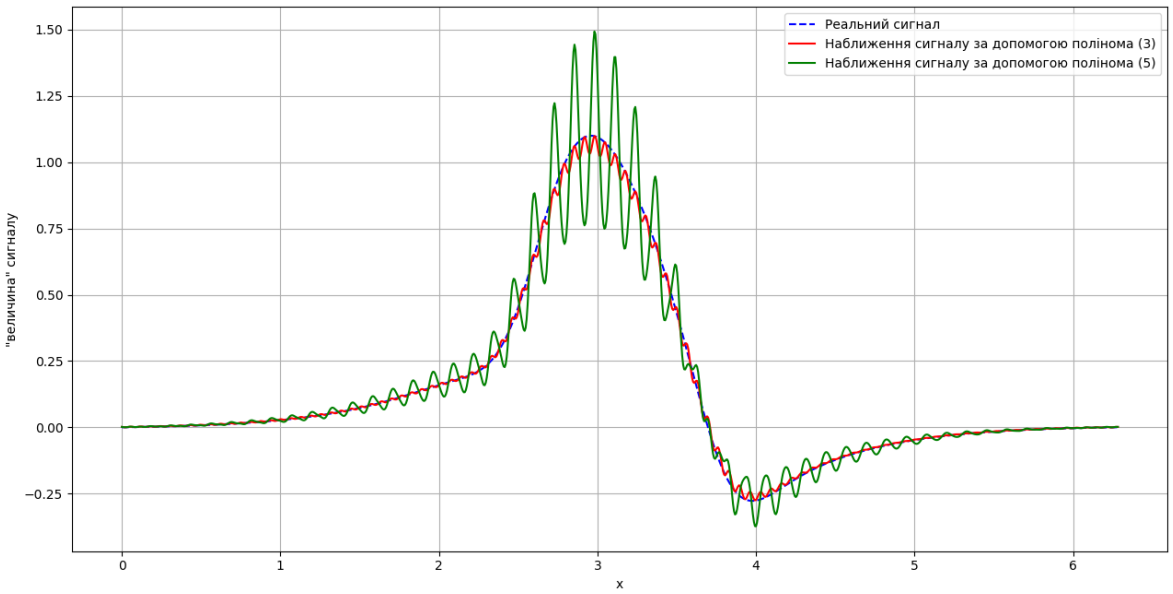

Рисунок 1. Відновлення сигналу на основі послідовності (5) за допомогою інтерполяційних аналогів (2) та (4)

Як видно на рис. 1, поліноми (2) та (4) правильно визначають загальну поведінку сигналу. Однак, поліном (2) значно краще наближає сигнал попри те, що він базується на методі чисельного інтегрування, який, в загальному випадку, є менш точним. Для того, щоб переконатися в тому, що таке твердження правильне не лише для конкретно випадку (5), розглянемо ще один приклад.

Приклад 2.

Аналогічно до попереднього випадку побудуємо наближення сигналу за допомогою (2) та (4) і побудуємо графіки отриманих поліномів (див. рис. 2).

Розглянемо тепер випадок, коли розглядуваний цифровий сигнал представляється послідовністю

$$3e^{-3\left(\frac{2\pi k}{99}-\frac{\pi}{2}\right)^2}\sin\frac{2\pi k}{99}-6e^{-6\left(\frac{2\pi k}{99}-\pi\right)^2}\cos\frac{4\pi k}{99}+ \quad (6)$$
$$+9e^{-6\left(\frac{2\pi k}{99}-\frac{\pi}{2}\right)^2}\sin\frac{2\pi k}{33}, k=0,1,2,...,99,$$

тобто є дискретним аналогом сигналу, що описується функцією

$$f(x)=3e^{-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\sin x-6e^{-6(x-\pi)^2}\cos 2x+$$
$$+9e^{-6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\sin 3x, x\in[0,2\pi].$$

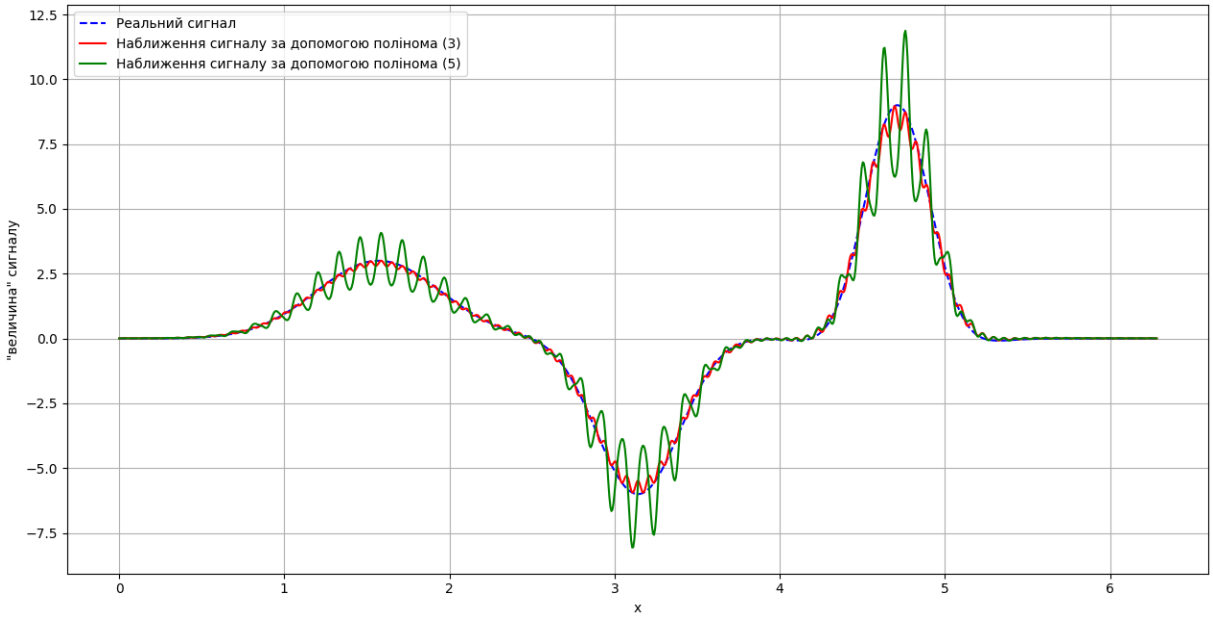

Рисунок 2. Відновлення сигналу на основі послідовності (6) за допомогою інтерполяційних аналогів (2) та (4)

На рис. 2 ми бачимо аналогічну ситуацію: поліноми (2) та (4) правильно визначають загальну поведінку сигналу, але поліном (2) значно краще наближає сигнал.

Таким чином можна заключити, що інтерполяційні поліноми операторів, породжених лінійним підсумовуванням рядів Фур'є, які будуються відповідно до вже наявних робіт, відновлюють сигнали краще, ніж якщо їх намагатися будувати через точніші методи чисельного інтегрування.

Обговорення

У дослідженні порівнюючи побудову інтерполяційних аналогів оператора Фейєра за допомогою чисельного його інтегрування методом прямокутників, який в даному ракурсі є класичним, та методом Сімпсона, продемонстровано, який вигляд мають інтерполяційні аналоги в обох випадках, та наглядно показано, який із них дає кращу точність при наближенні сигналу на основі його дискретного варіанта, що вивчається та узагальнюється радіотехнічними засобами розвідки.

Висновки

В роботі вивчено вплив вибору методу чисельного інтегрування при побудові інтерполяційних аналогів операторів, породжених лінійним підсумовуванням рядів Фур'є. В межах дослідження порівняно метод прямокутників та метод Сімпсона у випадку побудови інтерполяційних аналогів оператора Фейєра (1). Встановлено, що використання методу прямокутників, який в даному контексті є класичним, дозволяє побудувати наближення, значно точніше за те, що можна отримати при використанні методу Сімпсона. Це підтверджується рисунками 1 та 2. Можливо, більш детальне дослідження даного питання з математичної сторони [1, 4, 9] зможе вказати причини даного явища, а також виявити нові.

Отримані результати можуть бути використані для вивчення та дослідження характерних ознак випромінювання радіолокаційних станцій противника радіотехнічними засобами розвідки для їх подальшого радіоелектронного подавлення, в інших багатьох сферах, таких як обробка сигналів [3, 10], дослідження функціональної стійкості систем [11] та інших.

Список використаних джерел

1. Hamming R. W. Numerical methods for scientists and engineers. 2nd ed. New York : Dover Publications, 1987. 752 p.

2. Manolakis D., Proakis J. Digital signal processing: Principles, algorithms and applications. 3rd ed. New Jersey : Prentice-Hall International, 1996. 1032 p.

3. Lyons R. G. Understanding digital signal processing. 2nd ed. New Jersey : Prentice-Hall International, 2004. 684 p.

4. Schafer R., Rabiner L. A digital signal processing approach to interpolation. Proceedings of the IEEE. 1973. 61(6). P. 692–702.

5. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Kharkevych G. Application of trigonometric interpolation polynomials to signal processing. 2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT 2022): Proceedings. 2022. P. 156–159.

6. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. 2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis and Intelligent Computing (SAIC 2020). 2020. Art. no. 9239180.

7. Hamming R. W. Digital filters. New Jersey : Prentice-Hall International, 1977. 224 p.

8. Vaseghi S. V. Advanced digital signal processing and noise reduction. 3rd ed. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2006. 479 p.

9. Stein E. M., Shakarchi R. Fourier analysis. Princeton : Princeton University Press, 2003. 325 p.

10.Pichkur V., Sobchuk V., Cherniy D., Ryzhov A. Functional stability of production processes as control problem of discrete systems with change of state vector dimension. Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2024. №1. P. 105–110.

11.Барабаш О., Копійка О., Макарчук А. Динаміка зміни ймовірності зв'язності розподіленої інформаційної системи в часі з урахуванням випадкового впливу на елементи. Measuring and Computing Devices in Technological Processes. 2025. №1. С. 79–85.

12. S. M. Korotin, A. G. Salii, Y. P. Tselischev, I. P. Korovin, A. V. Kotsiuruba and Y. M. Kolomiets, "Modeling the characteristics of the stabilization circuit of a hypothetical dynamic system," 2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), Kyiv, Ukraine, 2020, pp. 227-233, doi: 10.1109/ATIT50783.2020.9349315.

[1]**Oleg Barabash** (Doctor of Technical Sciences, Assosiate Professor)
https://orcid.org/0000-0003-1715-0761
[2]**Andriy Makarchuk** (PhD student)
https://orcid.org/0000-0002-4906-5265
[3]**Bogdan Bilyavskiy** (Candidate of Military Sciences)
https://orcid.org/0009-0006-9036-7229
[2]**Volodymyr Tkachov** (Candidate of Military Sciences, Assosiate Professor)
https://orcid.org/0000-0001-8957-2723

[1]***The National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine***
[2]***The National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine***

METHOD OF APPROXIMATING DIGITAL SIGNALS USING INTERPOLATION ANALOGUES OF OPERATORS FOR RESEARCHING RADIOLOCATION STATIONS BY RADIO INTELLIGENCE EQUIPMENT

In the operation of many types of systems and mechanisms, digital signal processing plays a critical role. Within this field, a number of problems have been formulated, many of which can be considered classical to varying degrees. One such problem is signal approximation (or reconstruction), which often refers to the approximation of the function describing a signal based on its known values at specific moments in time.

Although the mathematical tools developed for this purpose are largely well-established, there remain several fundamental aspects that are typically addressed solely from a theoretical perspective—if at all—without sufficient consideration of technical or practical implications. This limitation can be critical, as it may complicate or even prevent achieving the required approximation accuracy in certain scenarios, which in turn can lead to a range of undesirable consequences.

One such aspect is the influence of the selected numerical integration method used in constructing discrete analogues of various tools commonly applied in signal processing. This situation arises, for example, when building interpolation analogues of operators generated by the summation of Fourier series—a topic of growing interest, particularly in the context of signal approximation problems.

This work attempts to address this issue by comparing the construction of interpolation analogues of the Fejér operator using numerical integration by the rectangle method, which is considered classical in this context, and Simpson's method. The study demonstrates the resulting forms of the interpolation analogues in both cases and visually illustrates which approach yields greater accuracy in approximating a signal based on its discrete representation.

Keywords: *interpolation, Fourier series, Fourier series summation, operators, Fejér operator, numerical integration, rectangle method, Simpson's method, approximation, digital signal processin, which is studied and generalized radio intelligence equipment.*

References

1. Hamming R. W. Numerical methods for scientists and engineers. 2nd ed. New York : Dover Publications, 1987. 752 p.
2. Manolakis D., Proakis J. Digital signal processing: Principles, algorithms and applications. 3rd ed. New Jersey : Prentice-Hall International, 1996. 1032 p.
3. Lyons R. G. Understanding digital signal processing. 2nd ed. New Jersey : Prentice-Hall International, 2004. 684 p.
4. Schafer R., Rabiner L. A digital signal processing approach to interpolation. Proceedings of the IEEE. 1973. 61(6). P. 692–702.
5. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Kharkevych G. Application of trigonometric interpolation polynomials to signal processing. 2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT 2022): Proceedings. 2022. P. 156–159.
6. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. 2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis and Intelligent Computing (SAIC 2020). 2020. Art. no. 9239180.
7. Hamming R. W. Digital filters. New Jersey : Prentice-Hall International, 1977. 224 p.
8. Vaseghi S. V. Advanced digital signal processing and noise reduction. 3rd ed. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2006. 479 p.
9. Stein E. M., Shakarchi R. Fourier analysis. Princeton : Princeton University Press, 2003. 325 p.
10. Pichkur V., Sobchuk V., Cherniy D., Ryzhov A. Functional stability of production processes as control problem of discrete systems with change of state vector dimension. Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2024. №1. P. 105–110.
11. Barabash O., Kopiika O., Makarchuk A. Dinamics of connectivity probability of distributed information system change over time considering random influence on elements. Measuring and Computing Devices in Technological Processes. 2025. №1. C. 79–85.
12. S. M. Korotin, A. G. Salii, Y. P. Tselischev, I. P. Korovin, A. V. Kotsiuruba and Y. M. Kolomiets, "Modeling the characteristics of the stabilization circuit of a hypothetical dynamic system," 2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), Kyiv, Ukraine, 2020, pp. 227-233, doi: 10.1109/ATIT50783.2020.9349315.