DOI 10.33099/2786-7714-2024-1-6-137-140

УДК 355/51

Тюрін Віталій Вікторович (кандидат військових наук, доцент)
https://orcid.org/0000-0003-0476-7471
Барабаш Олег Володимирович (доктор технічних наук, професор)
https://orcid.org/0000-0003-1715-0761
Горобець Юрій Олексійович (кандидат військових наук, доцент)
https://orcid.org/0000-0001-7994-2022
Білявський Богдан Анатолійович (кандидат військових наук)
https://orcid.org/0009-0006-9036-7229

Національний університет оборони України, Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІВ БЕРШТЕЙНА ПРИ НАБЛИЖЕННІ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В МОДЕЛЯХ ДИНАМІКИ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТРОРІЙ ЛІТАКІВ ПІД ВПЛИВОМ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ

Математичними моделями багатьох реальних динамічних задач фізики, механіки, інженерії, авіації зручно представити за допомогою диференціальних рівнянь та їх системи. В силу цього зростає й актуальність досліджень щодо їх розв'язання. Однією з головних проблем при розв'язанні диференціальних рівнянь та їх систем є складність отримання точного розв'язку. Часто маємо ситуацію, коли неможливо отримати аналітичні розв'язки, та більше, немає методів їх конструктивної побудови. В результаті цього виникає необхідність в розробці підходів, які б дозволяли отримати, принаймні, наближення для розв'язків.

Задача побудови наближення розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь є досить важливою сферою досліджень, до якої існує постійний інтерес. Зокрема, останнім часом активно використовуються методи скінченних різниць та триангуляції. Перший полягає в заміні похідних на скінченні різниці відповідних порядків та подальшого зведення досліджуваного диференціального рівняння до системи рівнянь відносно значень функції-розв'язку при певних значеннях аргументів. Подібний принцип покладений, наприклад, і в методах типу методу Ейлера. Метод триангуляції є більш складним, але більш якісним методом наближення. Однак, ці методи не дозволяють знайти наближений розв'язок поставленої задачі у вигляді явно заданої функції. Це може виявитись неабиякою проблемою через неможливість якісно оцінити особливості функціональної залежності, яка визначена математичною формалізацією реального фізичного процесу, описаної диференціальним рівнянням. Водночас, результат використання вище згаданих методів дозволяє отримати певне наближення у вигляді функції, що в подальшому можна досліджувати засобами теорії наближень, інтерполяції, регресійних моделей, нейронних мереж, тощо.

Ключові слова: *крайові задачі, диференціальні рівняння, наближені розв'язки, тригонометричні поліноми, поліноми Бернштейна.*

Вступ

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння є зручними моделями для опису зміни в часі таких параметрів, як швидкість, висота, кут нахилу, курс польоту авіаційного судна тощо [1, 2]. Задача Коші для лінійних неоднорідних диференціальних рівняння дає можливість знайти єдине рішення з заданими початковими умовами, що відповідає реальному сценарію польоту. Знаючи динаміку польоту, можна передбачити, як літак буде рухатися в майбутньому. Це важливо для планування маршрутів, маневрів, а також для забезпечення безпеки польоту. Задачі Коші для відповідної системи диференціальних [3, 4] дозволяє дослідити вплив різних параметрів (приміром, тяги, підйомної сили, ваги) на динаміку польоту, дає можливість знайти оптимальні режими роботи двигунів, траєкторії польоту тощо, що може призвести до економії палива, зниження викидів та підвищення безпеки.

Попри бурхливий розвиток теорії диференціальних рівнянь часто постає проблема складності розв'язання диференціального рівняння з накладеними на нього обмеженнями [4]. У зв'язку з цим були розроблені методи наближеного пошуку диференціальних рівнянь з накладеними умовами [5], які б дозволяли наближено обчислити значення шуканої функції. Однак, часто при вирішенні такої задачі виникає необхідність знайти досить точне наближення шуканої функції [4], а не її певного роду оцінку [6]. Тому постає необхідність в розробці нових підходів до вирішення даної задачі.

Одним із найпоширеніших способів

наближення розв'язків диференціальних рівнянь є використання степеневих рядів [4]. Однак, даний підхід є досить трудомістким і вимагає багато складних математичних перетворень. Тому більш доцільним в цьому плані є використання чисельних методів [7], як от метод скінченних різниць, які дозволяють обчислити значення шуканого розв'язку при певних заданих значеннях аргументу чи аргументів. Але такий підхід не дозволяє побудувати наближення цього розв'язку у вигляді певної функції.

Дану проблему можна вирішити за допомогою, наприклад, інтерполяції [8-10]. На даний момент розроблені методи інтерполювання, які дозволяють отримувати досить непогане наближення необхідних функціональних залежностей. Однак, можна показати, що багато з цих методів буде вимагати велику кількість обчислень. Тому більш доцільним буде використання інших методів наближення функції при заданому наборі її значень як от лінійні фільтри [11], інтерполяційні аналоги різних операторів [12, 13] чи поліноми типу поліномів Бернштейна. Однак, якщо застосування тих же лінійних фільтрів чи інтерполяційних аналогів різних операторів типу оператора Пуассона добре вивчені або активно досліджуються в наш час, то використанню поліномів Бернштейна присвячено дуже мало робіт. Тому в даній роботі розглядається їх застосування для наближення розв'язків крайових задач для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку.

Метою статті є дослідження можливості застосування поліномів Бернштейна для наближення розв'язків крайових задач для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), y(0) = \breve{y}, y(1) = \hat{y} \quad (1)$$

Також досліджуються особливості даного підходу.

Матеріали та методи

Методи дослідження в статті розглядається застосування поліномів Бернштейна до наближення розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з використанням методу скінченних різниць. Продемонстровано та пояснено збіжність такого наближення до реального розв'язку вихідної задачі. Отримані результаті підтверджуються візуалізацією результатів.

Результати

Для початку означимо поліноми Бернштейна. Під поліномами Бернштейна [5] розуміють поліноми виду

$$B_n(f;x) = B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, x \in [0,1], \quad (2)$$

або, в нашому випадку,

$$B_n(f;x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, x \in [0,1]. \quad (3)$$

На даному етапі логічним постає питання про те, як знайти значення розв'язку $y\left(\frac{k}{n}\right) = y_k$. Це досить легко можна зробити за допомогою так званого методу скінченних різниць. Підставивши отримані значення в (3), ми отримаємо степеневий поліном, який буде наближати розв'язок поставленої крайової задачі (1).

Продемонструємо даний принцип наближення на конкретному прикладі. Нехай необхідно наблизити розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - \frac{1}{x^2+1}y' + \frac{\sin x}{x^4+1}y = e^x, y(0) = 0, y(1) = 2. \quad (4)$$

Знайшовши відповідно до методу скінченних різниць y_k при різних значеннях n та підставивши їх в (3), наближений розв'язок крайової задачі (4) матиме вигляд (рис. 1).

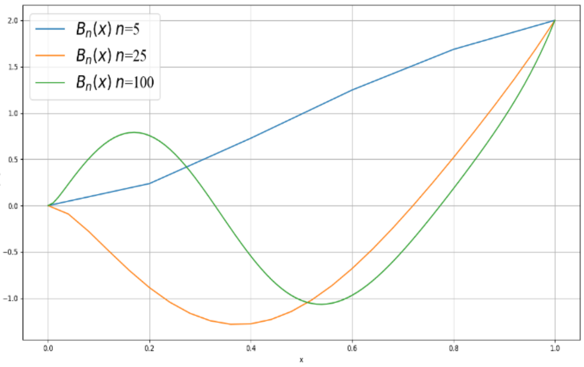

Рисунок 1. Наближення розв'язку задачі (4) поліномами Бернштейна при різних значеннях параметра *n*

Як бачимо результат наближення досить відрізняється. Однак, в силу рівномірності поліномів Бернштейна [5] є сенс взяти розглянути випадок, коли даний параметр є досить великим. Тоді ми отримаємо наступний результат (рис. 2)

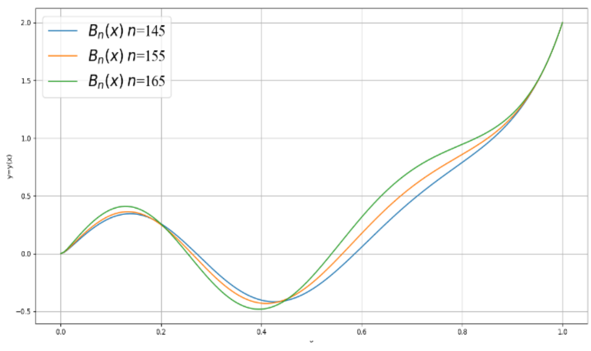

Рисунок 2. Наближення розв'язку задачі (4) за допомогою поліномів Бернштейна при великих значеннях *n*

Як бачимо, при великих значеннях n можна цілком адекватно оцінювати поведінку розв'язку задачі (4).

Для наочності продемонструємо наближення розв'язку наступної задачі

$$y'' + 3xy = \sin x,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1. \qquad (5)$$

Неважко показати, що аналітичним розв'язком буде функція

$$y = \frac{\left(\frac{3}{2} + \sin 1\right)x - \sin x}{0.5x^3 + 1}.$$

Однак, цікавим є наближення даного розв'язку, яке дасть застосування поліномів Бернштейна (рис. 3).

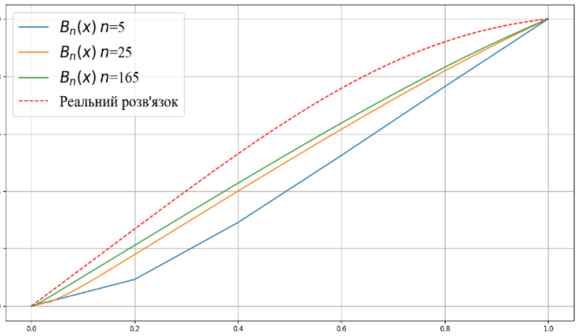

Рисунок 3. Порівняння реального розв'язку задачі (5) з наближенням, отриманим за допомогою поліномів Бернштейна

Обговорення

Результати проведеного дослідження вказують, що застосування поліномів Бернштейна, описане вище, дійсно непогано наближає розв'язки задачі (5), що говорить про можливість застосування описаного методу для наближення крайових задач (1).

Висновки

В даній роботі розглянуто метод наближення розв'язків задачі типу (1) за допомогою поєднання методу скінченних різниць та поліномів Бернштейна. Представлено специфіку наближення за допомогою такого підходу та на конкретному прикладі продемонстровано його адекватність. Показана якість наближення пов'язана з однієї сторони підвищенням точності значень y_k при збільшенні значення параметра n та рівномірній збіжності поліномів Бернштейна з другої [5]. Даний аспект робить застосування поліномів Бернштейна чудовим методом наближення розв'язків задачі (1). Результати отримані в роботі будуть корисними для дослідників та інженерів-практиків, які мають справу із задачами для яких важливо виконання умови єдиності розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Собчук В.В., Барабаш О. В., Мусієнко А.П. Основи забезпечення функціональної стійкості інформаційних систем підприємств в умовах впливу дестабілізуючих факторів: монографія. Київ: Міленіум, 2022. 272 с.
2. Миронюк М.Ю., Майстров О.О., Мусієнко А.П., Макарчук А.В. Аналіз побудови інтелектуальної інформаційної системи на основі поняття функціональної стійкості. Зв'язок, 2024, N 1. С. 3 -8.
3. Капустян О.В., Пічкур В.В., Собчук В.В. Теорія динамічних систем. Навч. посібн. Луцьк: Вежа-Друк, 2020. 348 с.
4. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Либідь, 2006. 424 с.
5. Гончаров В. Л. Теорія інтерполювання та наближення функцій. 2-ге вид. Держ. вид-во техн.-теорет. літ., 1954. 327 с.
6. Коллатс Л., Крабс В. Теорія наближень. Чебишевські наближення та їх застосування. Наука, 1978. 272 с.
7. Hamming R. W. Numerical methods for scientists and engineers. 2nd ed. Dover Publications, Inc., 1986. 731 p.
8. Привалов А. А. Теорія інтерполювання функцій. Вид-во Сарат. ун-ту, 1990. Т. 2. 193 с.
9. Schafer R. W., Rabiner L. R. A digital signal processing approach to interpolation. Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61, no. 6. P. 692–702.
10. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Kharkevych G. Application of Trigonometric Interpolation Polynomials to Signal Processing (2022) 2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2022 - Proceedings, pp. 156 – 159.
11. Vaseghi S. V. Advanced digital signal processing and noise reduction. 3rd ed. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2006. 479 p.
12. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Salnikova S. Biharmonic equations integrals application features at signals restoration by means of interpolation polynomials (2021) 2021 IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2021 - Proceedings, pp. 84 – 87.
13. Oleg Barabash, Hennadii Mylnykov, Mykola Myroniuk, Vasyl Yasynetskyi, Andriy Makarchuk, Serhii Bazilo. Properties of Low-Frequency Filters of One-Dimensional Signals with Limited Energy Spectrum. 5th International Congress on Human-Computer Interaction, Optimization and Robotic Applications (HORA 2023), June 8-10, 2023, Istanbul, Turkiye. Pp. 614 – 618.

Vitalii Tiurin **(Candidate of Military Sciences, Associate Professor)**
https://orcid.org/0000-0003-0476-7471
Oleh Barabash **(Doctor of Technical Sciences, Professor)**
https://orcid.org/0000-0003-1715-0761
Yurii Horobets **(Candidate of Military Sciences, Associate Professor)**
https://orcid.org/0000-0001-7994-2022
Bohdan Bilyavsky **(Candidate of Military Sciences)**
https://orcid.org/0009-0006-9036-7229

The National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine

APPLICATION OF BERSTEIN POLYNOMIALS IN THE APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF BOUNDARY-BORDER PROBLEMS IN MODELS OF THE DYNAMICS OF AIRCRAFT TRAJECTORY PARAMETERS UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL FACTORS

The problem of constructing approximations of solutions of the Cauchy problem for differential equations is a rather important area of research in which there is constant interest. In particular, finite difference and triangulation methods have been actively used recently. The first consists in replacing the derivatives with finite differences of the corresponding orders and further reducing the studied differential equation to a system of equations with respect to the values of the function-solution for certain values of the arguments. A similar principle is laid down, for example, in methods such as Euler's method. The triangulation method is a more complicated, but better approximation method. However, these methods do not allow finding an approximate solution to the given problem in the form of an explicitly given function. This may turn out to be quite a problem due to the impossibility of qualitatively assessing the features of functional dependence, which is determined by the mathematical formalization of a real physical process described by a differential equation. At the same time, the result of using the above-mentioned methods allows you to get a certain approximation in the form of a function, which can be further investigated by means of the theory of approximations, interpolation, regression models, neural networks, etc.

Keywords: *boundary value problems, differential equations, approximate solutions, trigonometric polynomials, Bernstein polynomials.*

References

1. Sobchuk V.V., Barabash O.V., Musienko A.P. Basics of ensuring the functional stability of information systems of enterprises under the influence of destabilizing factors: monograph. Kyiv: Millennium, 2022. 272 p.
2. Myronyuk M.Yu., Maistrov O.O., Musienko A.P., Makarchuk A.V. Analysis of the construction of an intelligent information system based on the concept of functional stability. Communication, 2024, N 1. P. 3-8.
3. Kapustyan O.V., Pichkur V.V., Sobchuk V.V. Theory of dynamic systems. Education manual Lutsk: Vezha-Druk, 2020. 348 p.
4. Perestyuk M.O., Marynets V.V. Theory of mathematical physics equations. Lybid, 2006. 424 p.
5. Goncharov V. L. Theory of interpolation and approximation of functions. 2nd edition Govt. type of technical theory lit., 1954. 327 p.
6. Kollats L., Krabs V. Theory of approximations. Chebyshev approximations and their application. Nauka, 1978. 272 p.
7. Hamming R. W. Numerical methods for scientists and engineers. 2nd ed. Dover Publications, Inc., 1986. 731 p.
8. A. A. Privalov, Theory of interpolation of functions. View of Sarat. University, 1990. T. 2. 193 p.
9. Schafer R. W., Rabiner L. R. A digital signal processing approach to interpolation. Proceedings of the IEEE. 1973. Vol. 61, no. 6. P. 692–702.
10. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Kharkevych G. Application of Trigonometric Interpolation Polynomials to Signal Processing (2022) 2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2022 - Proceedings, pp. 156 – 159.
11. Vaseghi S. V. Advanced digital signal processing and noise reduction. 3rd ed. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2006. 479 p.
12. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Salnikova S. Biharmonic equations integrals application features at signals restoration by means of interpolation polynomials (2021) 2021 IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2021 - Proceedings, pp. 84 – 87.
13. Oleg Barabash, Hennadii Mylnykov, Mykola Myroniuk, Vasyl Yasynetskyi, Andriy Makarchuk, Serhii Bazilo. Properties of Low-Frequency Filters of One-Dimensional Signals with Limited Energy Spectrum. 5th International Congress on Human-Computer Interaction, Optimization and Robotic Applications (HORA 2023), June 8-10, 2023, Istanbul, Turkiye. Pp. 614 – 618.