Герасименко Володимир Вікторович (кандидат військових наук)
https://orcid.org/0000-0003-2014-7408
Титатренко Олександр Іванович
https://orcid.org/0000-0002-3523-9519
Ковба Орест Петрович
https://orcid.org/0000-0001-5154-7151
Бобров Сергій Васильович (кандидат технічних наук, доцент)
https://orcid.org/0000-0002-09647-9700
Обозненко Євген Георгійович
https://orcid.org/0000-0003-3617-8604

Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ, Україна

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ КОНФІГУРАЦІЇ СПІЛЬНОЇ АВІАЦІЙНОЇ ГРУПИ ПІЛОТОВАНОЇ ТА БЕЗПІЛОТНОЇ АВІАЦІЇ

У статі розглянуто теоретичні аспекти формування конфігурації складної механічної системи, як прототипу спільної авіаційної групи пілотованої та безпілотної авіації. Вони розкриваються з позицій представлення рівнянь руху складної механічної системи, конструювання її руху та розв'язання зворотних задач динаміки керованих складних механічних систем.

Описано порядок задавання або збереження потрібної конфігурації складної механічної системи за рахунок системи керованих впливів та структуру зав'язків елементів, які б при усіх відхиленнях характеристик від бажаних, супроводжують зміну конфігурації, продукуючи відповідні керуючі сили. Наведена логічна залежність зміни конфігурації від мети руху системи.

При розв'язанні задачі управління конфігурацією складної механічної системи, виокремлено два взаємопов'язаних, але самостійних етапи: пошук системи керуючих сил та спосіб реалізації потрібної системи сил.

Також у статті сформульовано задачу управління конфігурацією складної механічної системи у загальному вигляді і розглянуто рівняння руху великої технічної системи, як спільної авіаційної групи пілотованої та безпілотної авіації, з точки зору складної механічної системи.

У статті доведено, що елементи складної механічної системи (літальні апарати) утворюють велику технічну систему (спільну авіаційну групу), що розташована на декількох об'єктах. Особливостями функціонування таких систем є наявність принципів поєднання елементів в систему, тобто сукупність заданих умов та обмежень, що накладаються на положення та рух елементів цієї системи. Сукупність таких умов та обмежень прийнято називати зв'язками, до яких також віднесено і взаємодію між елементами системи.

В статті, зв'язки аналітично описані рівняннями, що відображають залежність між координатами елементів системи, їх швидкостями і часом та об'єднуються у дві великі групи: утримуючі та неутримуючі. Це у подальшому використовується для заміни результату дії зв'язків на силу реакції зв'язків. Зазначається, що задача розв'язання рівнянь руху складних механічних систем є нетривіальною задачею та вимагає відомої винахідливості, що спирається на коректну математичну ідеалізацію зв'язків у відповідності з дійсною фізичною картиною.

Одержані рівняння руху елементів складної механічної системи ускладнюються із збільшенням числа тіл, що входять до складу цієї системи. Таким чином, задача управління системою тіл, як спільною авіаційною групою пілотованої та безпілотної авіації, не може бути зведена до класичних задач механіки, а її інформаційні аспекти найчастіше мають визначне значення, що потребує окремого дослідження.

Ключові слова: *складна механічна система, конфігурація, управління, спільна авіаційна група, пілотована та безпілотна авіація.*

Вступ

Постановка завдання. Розглянемо завдання, що пов'язані з описом та вивченням великої технічної системи (ВТС) бойового порядку пілотованої та безпілотної авіації у вигляді керованої складної механічної системи (СМС). Як механіка польоту є основою для створення систем управління літальними апаратами, так і механіка спільного руху групи літальних апаратів є основою для синтезу відповідних систем управління. Розглянемо такі питання:

представлення рівнянь руху СМС;

конструювання руху СМС;

розв'язання зворотних задач динаміки керованих СМС.

У аналітичній механіці під СМС розуміють будь-яку сукупність матеріальних точок, що знаходяться під дією заданих сил та підкорених різного роду механічним зв'язкам [1]. Причому тверде тіло розглядається, як сукупність матеріальних точок, закріплених на жорсткому невагомому "каркасі". Довільне тіло у будь-якій задачі механіки можна замінити еквівалентною йому жорсткою системою координат [2]. Тому у загальному випадку немає необхідності деталізувати, що є предметом дослідження чи то система точок, чи то система тіл. Розв'язуючи задачі управління СМС, необхідно, перш за все, визначитися з параметрами управління, по-друге, здійснити декомпозицію системи на керовані елементи.

Положення всіх точок та тіл СМС у просторі [3] будемо називати конфігурацією. Визначення конфігурації означає разом з тим і визначення взаємного розташування точок і тіл СМС, що назвемо відносною конфігурацією. Комплекс задач, пов'язаних з управлінням конфігурацією, містить у собі: формування, управління рухом СМС як єдиного цілого.

У ряді випадків вимагається, щоб у процесі руху характеристики взаємного положення елементів системи змінювались у функції параметрів їх руху (швидкості, прискорення тощо). Природньо, що ця вимога повинна бути сформульована у вигляді мети управління рухом, тобто вказання тих якостей, якими повинен володіти рух усієї системи та її елементів.

При визначенні конфігурації системи, слід охарактеризувати зв'язки між елементами та самі елементи у тій мірі, в якій це має відношення до структурних особливостей системи, розташованої на певній кількості об'єктів. Мова йде про те, що необхідно визначити: рух саме яких елементів є незалежним від руху решти елементів, а яких залежним. Задля використання загальновживаної термінології, перші елементи будемо називати ведучими, другі – веденими. При цьому, у в межах спільного бойового застосування у складі спільної авіаційної групи (САГ), під ведучими розуміються літаки пілотованої авіації, під веденими – безпілотні літальні апарати, які управляються з борту пілотованих літаків. Поставлене завдання у системі ведучих та ведених елементів СМС визначає структуру зав'язків. Під зв'язком будемо розуміти саме загальне визначення різних з'єднань між елементами. За своєю сутністю, зв'язки можуть бути голономними та неголономними, реономними та склерономними, а за способом реалізації – матеріальними (механічними) та інформаційними.

Якщо необхідно задати або зберегти потрібну конфігурацію, то слід забезпечити таку систему керованих впливів та структуру зав'язків елементів, які б при усіх відхиленнях характеристик від бажаних, супроводжують зміну конфігурації, продукувати відповідні керуючі сили. Зміни конфігурації обумовлені метою руху системи.

Природньо, що спосіб представлення руху повинен забезпечити отримання інформації у вигляді, доступному для розв'язання теоретичних та практичних питань, пов'язаних з управлінням системою. Вибір способу представлення диктується стратегічною ціллю – створенням системи управління та повинен забезпечувати уяснення її конструктивних особливостей. У першу чергу, це стосується датчиків первинної інформації.

Розв'язуючи задачу управління конфігурацією складної механічної системи, слід виокремити два, хоч і взаємопов'язаних, але самостійних етапи: пошук системи керуючих сил; спосіб реалізації потрібної системи сил.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Сформулюємо задачу управління конфігурацією у загальному вигляді. Нехай R – множина усіх дійсних чисел. Через R^N позначимо N-мірний дійсний лінійний простір. Рух в R^N визначимо як диференційоване відображення $X: I \rightarrow R^N$ інтервалу дійсної осі у R^N. Образ відображення $X: I \rightarrow R^N$ назвемо траєкторією у R^N. При розгляді руху системи, що складається з n твердих тіл, слід мати на увазі сумісний розгляд n траєкторій, x_i: $I \rightarrow R^N$, де $i = I, ..., n$, N – число ступенів свободи твердого тіла складної механічної системи.

Прямий добуток n екземплярів R^N називається конфігураційним простором системи n твердих тіл [4]. Сукупність відображень x_i: $R \rightarrow R^N$ визначає одне відображення X: $R \rightarrow R^K$, $K = N_n$, осі часу у конфігураційному просторі. Таке відображення і буде визначати рух системи n твердих тіл у системі координат $R \times R^N$. Задача управління конфігурацією, полягає у пошуку функції F, що відображає $(R^K \times R^N \times R)$-мірний простір у потрібний конфігураційний простір.

Рух системи визначається її початковим положенням $(x(t_0) \in R^K)$ та початковими швидкостями $(\dot{x}(t_0) \in R^K)$. Початкові положення та швидкість визначають прискорення, тобто існує така функція F: $R^K \times R^N \times R \rightarrow R^K$, що $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$.

Відповідно до теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші теорії звичайних диференціальних рівнянь, функція F та початкові умови $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ визначають рух СМС (передбачається дотримання умов гладкості у визначений термін часу). Вигляд функції F для кожної конкретної механічної системи визначається особливостями побудови цієї системи. З точки зору математики, вигляд функції F для СМС складає визначення цієї системи. Задача управління СМС буде розв'язана, якщо буде визначена $F = F(x, \dot{x}, t)$.

Припустимо, що задача управління полягає у забезпеченні у сумісного управління системою, що складається з n тіл. Позначимо їх поточні координати через $x_{\nu j}$ ($\nu = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, N}$), де ν – номер тіла, j – номер координат. Необхідно записати програму управління заданою конфігурацією. З цією метою задаємо $K = N_n$ функції часу. Якщо координати СМС у кожний момент часу дорівнюють цим функціям, то система має бажану конфігурацію. Нехай ці функції будуть φ_{vj}, тоді програма управління конфігурацією описується системою K рівнянь:

$$x_{vj}=\varphi_{vj}(t),\ (v=\overline{1,n};\ j=\overline{1,N}) \qquad (1)$$

На прикладі руху центру мас одного з тіл системи опишемо схему знаходження сил, що забезпечують рух з потрібною конфігурацією. Припустимо, що рух заданий у вигляді

$$x = x(t, x_0, \dot{x}_0) \qquad (2)$$

де x	–	радіус-вектор центру мас у заданій системі координат;
$x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ та $\dot{x}_0 = (\dot{x}_{01}, \dot{x}_{02}, \dot{x}_{03})$	–	постійні вектори початкового положення та початкової швидкості центру мас відповідно.

Диференціюючи співвідношення (2) по t, одержимо

$$\dot{x} = \dot{x}(t, x_0, \dot{x}_0) \qquad (3)$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}(t, x_0, \dot{x}_0) \qquad (4)$$

З векторних рівнянь (2) та (3) знайдемо вектори

$$x_0 = x_0(t, x, \dot{x}) \qquad (5)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_0(t, x, \dot{x}) \qquad (6)$$

З виразу (4),ураховуючи (5) та (6) та з виключенням векторів x_0 та $\dot{x}_0$, одержимо вираз для сукупної сили, що діє на тіло СМС

$$m\ddot{x} = A \qquad (7)$$

де $F=m\ddot{x}(t,\ x_0(t,x,\dot{x}),\dot{x}_0(t,x,\dot{x})\ )=F(t,x,\dot{x})$.

Одержано відповідь на питання, як забезпечити рух (2). Перейдемо до опису забезпечення потрібного закону зміни сили, що діє на тіло СМС, з урахуванням як можливостей кожного з тіл системи, так і специфіки системи як одного цілого.

У СМС з великою кількістю елементів схеми зав'язків можуть бути самими різноманітними, наприклад, може бути декілька ведучих та декілька ведених (декілька пілотованих літаків та декілька безпілотних літальних апаратів, що управляються з борту цих пілотованих літаків). Наявні зв'язки дозволяють запрограмувати рух СМС у відмінній від (1) формі. Для ведучих (пілотованих літаків зі складу спільної авіаційної групи) – програма руху задається у вигляді

$$\Psi_i=\left(x_{lj},t\right)=0,\ \text{при}\ l = 1, 2, \ldots, m;\ l < n;\quad j=\overline{1,N}; \qquad (8)$$

де m – кількість ведених у системі.

Рівняння (8) повинно бути розв'язане відносно x_{lj}. Для ведених (безпілотних літаків у складі спільної авіаційної групи) – задається відносна конфігурація. Наприклад, для СМС, до складу якої входять три підсистеми (спільні авіаційні групи) по чотири елементи в кожній, програма руху може бути задана наступним чином

$$\begin{array}{lll}
\Psi_1=\left(x_{1j},t\right)=0, & \Psi_5=\left(x_{5j},t\right)=0, & x_{1j}\text{-}x_{9j}=q(t),\\
x_{1j}\text{-}x_{2j}=\alpha(t), & x_{5j}\text{-}x_{6j}=\alpha'^{(t)}, & x_{9j}\text{-}x_{10j}=\alpha''^{(t)},\\
x_{1j}\text{-}x_{3j}=\beta(t), & x_{5j}\text{-}x_{7j}=\beta'^{(t)}, & x_{9j}\text{-}x_{11j}=\beta''^{(t)},\\
x_{1j}\text{-}x_{4j}=\gamma(t), & x_{5j}\text{-}x_{8j}=\gamma'^{(t)}, & x_{9j}\text{-}x_{12j}=\gamma''^{(t)}.
\end{array} \qquad (9)$$

Схема пошуку системи сил елементів СМС, що рухаються у відповідності з програмами (9), аналогічна описаній вище: задається бажаний рух, після чого винаходяться сили та моменти, що його забезпечують.

Специфіка руху конкретної конфігурації принципових відмінностей у процедуру визначення керуючих сил не вносить. Але це один бік розв'язання задачі управління конфігурацією. Відмінності у способах завдання конфігурації позначаються при розв'язанні питань реалізації систем управління об'єктами системи, через керуючі сили, що створюються у системах управління шляхом співставлення дійсних та бажаних характеристик руху, які для різних програм відмінні. Іншими словами, кожний спосіб завдання конфігурації передбачає свою систему отримання та переробки інформації, свої специфічні закони управління.

Усі попередні міркування спрямовані на те, що задача управління конфігурацією СМС не може бути зведена до класичних задач механіки. Її інформаційні аспекти найчастіше мають визначне значення та у деяких випадках можуть розглядатися автономно. Разом з тим, дослідження механіки системи твердих тіл є базою для вирішення задач управління. Органічне поєднання методів теорії механіки з методами теорії управління можуть надати конструктивні результати.

Опишемо порядок розв'язання задачі управління конфігурацією СМС. Сукупність значень узагальнених координат (q_1, …, q_N), яка єдина визначає положення тіл складної механічної системи у просторі у даний момент часу, описує конфігурацію системи.

Припустимо, що кожне з тіл системи має автономну систему управління. Нехай механічна система з L ступенями свободи рухається під управлінням у відповідності до диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{j=1}^{m}S_{ij}U_j. \qquad (10)$$

Застосовуючи загальноприйняті у механіці визначення для матриць коефіцієнтів у визначенні кінетичної енергії матеріальної системи [5]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{v=1}^{L}\sum_{p=1}^{L}A_{vp}\dot{q}_v\dot{q}_p+\sum_{v=1}^{L}B_v\dot{q}_v+T_0,$$

тобто, позначення через A квадратну матрицю розмірності L у квадратичній формі узагальнених швидкостей $\dot{q}_i$ систему (10) можна представити у вигляді

$$A\ddot{q}=grad\ W+R+SU, \qquad (11)$$

де W – деяка функція змінних t, $q_1, \ldots, q_L$; $q_1, \ldots, q_L$ у виразі для узагальненої сили $Q_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}+R_i$; $q=(q_1, \ldots, q_L)$;

R – сукупність таких гіроскопічних сил, що $(q^T, R) = 0$;

S – матриця розмірності $l \times m$; $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – вектор управління.

Необхідно винайти закони управління, що забезпечують збереження конфігурації системи у процесі її руху, тобто

$$\vartheta_j(t,q_1,\ldots,q_L)=0,\ j = 1, \ldots, n. \qquad (12)$$

Якщо визначена задача вирішується, то у результаті диференціювання (12) одержимо

$$\frac{\partial\vartheta_j}{\partial t}+\frac{\partial\vartheta_j}{\partial q_i}q_i=0,\quad \begin{matrix} j=1,\ldots,n; \\ i=1,\ldots,L. \end{matrix} \qquad (13)$$

Переходимо до векторного запису, одержимо

$$\Theta(t,q)=0; \qquad (14)$$

$$\Theta^*(t,q,\dot{q})=0 \qquad (15)$$

Диференціюємо (15) з урахуванням (11), одержимо

$$\left\{\frac{\partial\Theta^*}{\partial\dot{q}}\right\}A^{-1}grad\ W+\left\{\frac{\partial\Theta^*}{\partial\dot{q}}\right\}A^{-1}R+\left\{\frac{\partial Q^*}{\partial q}\right\}\dot{q}+\frac{\partial\Theta^*}{\partial t}+\left\{\frac{\partial Q^*}{\partial\dot{q}}\right\}A^{-1}SU=0. \qquad (16)$$

Якщо тепер винайти управління, що задовольняє (16), то у процесі руху СМС рівняння (10) буде забезпеченим. Шуканий вектор управління позначимо через U^*.

Уведемо у розгляд функцію Ψ, яка характеризує зміни узагальнених координат та їх швидкостей, а також їх взаємні поєднання, та дорівнює 0 при умові збереження заданої конфігурації ($\Theta = 0$, $\Theta^* = 0$)

$$\Psi=\Psi(t,q,\dot{q},\Theta,\Theta^*)=0.$$

Наведено, що існує управління U, при якому СМС буде зберігати задану конфігурацію при умові, коли η, $\Psi = 0$.

При русі системи (10) початкова конфігурація задовольняє співвідношення $\Theta(t_0, q_0) = 0$, та буде зберігатися множина конфігурацій (12). При цьому слід пам’ятати про умови, що покладаюся на узагальнені швидкості складної механічної системи необхідністю задовольняти рівнянням (15).

Отже, обґрунтованим буде припущення щодо необхідності реалізації ієрархічної структури управління складною механічною системою з вичлененням контурів управління узагальненими координатами (положенням), швидкістю та прискоренням (першими та другими похідними).

Значний інтерес представляють питання управління системами, що складаються з елементів, які володіють певним ступенем автономності та поєднуваних у єдину систему посередництвом внутрішньосистемних зв’язків. Зазвичай ці елементи представляють автономні, рухомі з власними системами управління, що реалізують необхідну стратегію управління, яка поєднує локальні (підсистеми) та глобальні (загальносистемні) цілі.

Один з варіантів (способів) управління такими системами полягає у тому, що в системі виокремлюються базові та супідрядні елементи. Базовими вважаються елементи, рух яких не залежить від руху решти елементів системи; базовий елемент може бути як керованим, так і некерованим. Супідрядними вважаються елементи, рух яких залежить хоча б від одного з елементів системи.

Дослідимо наведену задачу управління з точки зору класичної механіки, спираючись на запис руху у вигляді рівнянь Лагранжу 2-го роду для базової та супідрядної систем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{2q}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T_{2q}}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{1qs}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T_{1qs}}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{1q}}{\partial \dot{q}_j}--\frac{\partial T_{1q}}{\partial q_j}-\frac{\partial (T_{2s}+T_{1s}+T_0)}{\partial q_j}=Q_j,\ j=\overline{1,K}, \tag{17}$$

де Q – узагальнені сили, що віднесені до координат $q_1, \ldots, q_k$;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{2s}}{\partial \dot{s}_l}-\frac{\partial T_{2s}}{\partial s_l}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{1qs}}{\partial \dot{s}_l}-\frac{\partial T_{1qs}}{\partial s_l}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{1s}}{\partial \dot{s}_l}-\frac{\partial T_{1s}}{\partial s_l}-\frac{\partial (T_{2s}+T_{1s}+T_0)}{\partial s_l}=U_l,\ l=\overline{1,m}, \tag{18}$$

де U – вектор управління узагальненими силами віднесених до координат $s_1, \ldots, s_m$.

Розв'язання систем рівнянь (17) і (18) дає відповідь щодо можливості реалізації заданого програмного руху. Якщо є можливість реалізувати вказаний рух, то управлінські впливи $u_1, \ldots, u_m$ вимагається вибирати за умов стійкості процесів управління, із забезпеченням їх оптимальності.

У законах руху кожного з елементів відображена мета функціонування СМС. Локальні рухи визначаються з аналізу руху системи як одного цілого. Тобто, задачі руху СМС декомпозуються залежно від руху елементів, які визначаються з загального математичного опису системи. Тому, якщо задані співвідношення

$$q_i = \varphi_i(t), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{19}$$

де $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ – дійсні, двічі безперервно диференційовані функції, задані при $t \in [t_0,\ t_1]$, будемо вважати закон зміни конфігурації у часі. Причому точне дотримання законів (19) обумовлює збереження заданої відносної конфігурації.

Матеріальну систему будемо називати керованою, якщо існує керований вплив, що забезпечує приведення системи до заданої конфігурації та її збереження. Підставивши вираз для кінетичної енергії

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}^T A_0\dot{q}+\dot{q}^T B_0\dot{s}+\dot{s}^T C_0\dot{s}+\dot{s}^T B_0^T\dot{q}\right)+A_1\dot{q}+C_1\dot{s}+T_0\ , \tag{20}$$

де $\dot{q}$, $\dot{s}$ – вектори похідних координат $\dot{q}=\left(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_k\right)$, $\dot{s}=(\dot{s}_1,\dot{s}_2,\ldots,\dot{s}_m)$;

A_0 – квадратна матриця розміру $K \times K$;

у рівнянні Лагранжу, одержимо диференційні рівняння руху базової (пілотованих літаків) та руху супідрядної (безпілотних літальних апаратів) систем

$$A_0\ddot{q}+B_0\ddot{s}=Q\text{-}N; \tag{21}$$

$$C_0\ddot{s}+B_0^T\ddot{q}=U\text{-}M. \tag{22}$$

Вектори N та M відображають взаємозв'язок між базовою (пілотованими літаками) та супідрядною (безпілотними літальними апаратами) системами. Враховуючі залежність (19), маємо можливість виключити з системи (21) величини $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_k$. Одержана система має рішення

$$S_1=S_1(t),\ \ l=\overline{1,m}. \tag{23}$$

При відомих залежностях (19) та (23) з рівняння (22) знайдемо єдину систему функції

$$U_1=U_1(t). \tag{24}$$

Системи (21), (22) при початкових умовах

$$q_{i0}=\varphi_i(t_0),\ \dot{q}_{i0}=\dot{\varphi}_i(t_0),\ s_{l0}=s_l(t_0),\ \dot{s}_{l0}=\dot{s}_l(t_0)$$

та управлінні (24) має єдине рішення. З доказу зрозуміло, що це рішення має співпадати з (19).

Розглянемо рівняння руху великої технічної системи (спільної авіаційної групи пілотованої та безпілотної авіації), як складної механічної системи. Коли йдеться щодо сумісного руху декількох твердих тіл (пілотованих та безпілотних літаків), слід вважати, як це відмічено у 1, що ці тіла (літальні апарати) утворюють велику технічну систему (спільну авіаційну групу), що розташована на декількох об'єктах. Особливості функціонування систем визначаються принципами поєднання елементів в систему, тобто сукупністю заданих умов та обмежень, що накладаються на положення та рух елементів системи. Ці умови та обмеження прийнято називати зв'язками [6]. До зв'язків необхідно віднести також і взаємодію між елементами системи.

В механіці зв'язки аналітично описуються рівняннями, що відображають залежність між координатами елементів системи, їх швидкостями і часом та об'єднуються у дві великі групи: утримуючі та неутримуючі. Аналітично ці групи описуються рівняннями

$$f_j=(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t)=0,\ \ j=1,2,\ldots,N. \tag{25}$$

$$f_j=(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,t)\geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,N.. \tag{26}$$

Умовами стаціонарності зв'язків є

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}=0,\ \ j=1,2,...,N.$$

Залежно від того чи є вирази (25) та (26) кінцевими співвідношеннями або диференційними рівняннями, зв'язки поділяються на кінцеві (геометричні) та диференціальні (кінематичні). Диференційні зв'язки накладають явні обмеження на координати та швидкості, та опосередковані – на прискорення. Кінцеві та диференційні інтегровані зв'язки, що можна описати кінцевими виразами, що містять константи інтегрування, називаються голономними, а неінтегруємі зв'язки – неголономними.

Зв'язки, що накладаються на тіла (літальні апарати) системи, обмежують свободу руху цих тіл (ЛА), відхиляючи їх рух від того, який вони мали б під дією тих же сил, перебуваючи вільними від зв'язків. Тому, цілком обґрунтовано вважати, що результат дії зв'язків такий же, що і результат дії інших сил. Відповідно до аксіоми зв'язків [7], їх дію можна замінити силами реакції зв'язків.

Реакції зв'язків за сутністю відрізняються від інших діючих на систему (спільну авіаційну групу) сил. Ця відмінність полягає у тому, що реакція зв'язку визначається не самим зв'язком, а ще залежить від інших сил, що діють на систему (спільну авіаційну групу), та від руху системи тіл (літальних апаратів).

Окремо розглянемо характеристики сил, що діють на кожне з тіл (літальний апарат) системи (спільної авіаційної групи). Їх доцільно об'єднати у дві групи: внутрішньосистемні та несистемні [6]. До внутрішньосистемних віднесемо сили взаємодії елементів системи (ЛА САГ) та реакції зв'язків і позначимо їх F_{ji}. До несистемних віднесемо решту сил та позначимо їх F_i.

Тоді для поступового руху тіла (ЛА) можна записати

$$m_i\ddot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}F_{ji}+F_i, \qquad (27)$$

де F_{ji} – сила, з якою j-те тіло (j-й ЛА) діє на i-те тіло (j-й ЛА) системи (спільної авіаційної групи) ($F_{ii}=0$).

В класичній механіці [6,7] зазвичай передбачається, що сили підпорядковуються третьому закону Ньютона, тобто закону щодо рівності сил дії та протидії, згідно якого сили взаємодії двох тіл дорівнюють за величиною, протилежні за напрямком та діють вздовж прямої, що їх з'єднує.

При цьому припущенні для системи з n матеріальних тіл справедливе співвідношення

$$m_i\ddot{x}_i=F_i+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{F_{ji}},\ \ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,n,\ i\neq j. \qquad (28)$$

Перший член у правій частині рівняння (28) визначає головний вектор зовнішніх сил, лінія дії яких проходить через центр маси тіл, а другий член обертається у 0, через закон рівності сил дії та протидії кожна сума $F_{ji}+F_{ij}=0$.

Але у багатьох завданнях вказані припущення несправедливі, тому рух слід описувати виразом (28), конкретизуючи спосіб представлення другої суми правої частини. Фізичною основою є внутрішньосистемні зв'язки між її елементами (тілами).

Математичні вирази неголономних зв'язків не можуть бути використані для виключення залежних координат. Тому, для задачі з такого роду зв'язками, загального методу розв'язання не існує. Щоб подолати труднощі пов'язані з відсутністю інформації щодо обумовлених зв'язками сил, слід визначити задачу таким чином, щоб реакції зв'язків у ній не фігурували. При цьому, справу будемо мати лише з відомими нам силами. Необхідно діяти методично подібно до випадку розгляду твердого тіла у вигляді системи точок, відстані між якими незмінні. Реакціями зв'язків тут слугують внутрішні сили, робота яких дорівнює 0. Розглянемо випадок поступового руху n твердих тіл, надавши їм номери 1, 2, ..., n. Координати центрів мас відносно деякої нерухомої прямокутної системи позначимо через x_1, x_2, …, x_N, де $N = 3n$. Тоді центр мас тіла з номером i буде мати координати x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}.

Припустимо, на систему накладено K зв'язків, що описуються рівняннями

$$\sum_{s=1}^{N}A_{is}\,dx_s+A_idt=0,\ \ i=1,2,...,k<N. \qquad (29)$$

Коефіцієнти A_{is}, A_i – функції, що мають першу похідну та безперервну у області значень x_1, x_2, …, x_N; t. Рівняння (29) передбачаються незалежними, а їх число – найменшим. Це означає, що ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює K. У рівняннях

$$\sum_{s=1}^{N}A_{is}\dot{x}_i+A_i=0,\ \ i=1,2,...,k. \qquad (30)$$

можна задати $N – k$ значень $\dot{x}_i$; решта K значень $\dot{x}$ визначаються з рівнянь. Значення різності $N – k$ визначає число ступенів свободи системи.

Найбільш часто в класичних задачах зустрічається випадок, коли система рівнянь (30) цілком інтегрована, тобто може бути представлена K рівняннями виду $df_i = 0$, $i = 1, 2, …, k$, де $f_i = f_i(x_1, x_2, …, x_N; t)$. Такі системи називаються голономними, а рівняння зв'язку можуть бути записані у вигляді

$$f_i = C_i. \qquad (31)$$

У подальшому будемо оперувати рівняннями зв'язку у формі (31), причому константи C_i мають задані значення. Математично рівняння зв'язку для незмінних відстаней між центрами мас i-го і j-го тіла системи запишеться у вигляді

$$\left(x_{3j\text{-}2}\text{-}x_{3i\text{-}2}\right)^2+\left(x_{3j\text{-}1}\text{-}x_{3i\text{-}1}\right)^2+\left(x_{3j}\text{-}x_{3i}\right)^2=C_{ji}$$

Уведемо реакції зв'язків F_{ji1}, F_{ji2}, …, F_{jiN}, сумарна робота яких на будь-якому віртуальному переміщенні системи дорівнює 0. Віртуальне переміщення визначається як будь-яке переміщення δx_1, δx_2, …, δx_N, що задовольняє рівнянням

$$\sum_{s=1}^{N} A_{is}\delta x_s=0,\ \ i=1,2,...,k. \tag{32}$$

Як слідство

$$\sum_{s=1}^{N} F_{jis}\delta x_s=0. \tag{33}$$

для будь-якого (δx_1, δx_2, …, δx_N), що задовольняє (32). Реакції зв'язку отримуються такими, що рух під дією сукупної системи сил задовольняє рівнянням (32).

Записані рівняння дозволяють виразити величини F_{ji1}, F_{ji2}, …, F_{jiN}, за допомогою K множників λ_i

$$F_{ji}=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i A_{is},\ \ s=1,2,...,N. \tag{34}$$

Рівняння руху (28) приймають вид

$$m_s\ddot{x}_s=F_s+\sum_{i=1}^{K}\lambda_i A_{is}\,,\ \ s=1,2,...,N, \tag{35}$$

які необхідно розглядати у сукупності з K рівняннями зв'язку

$$\sum_{s=1}^{N} A_{is}\dot{x}_s+A_i=0,\ \ i=1,2,...,k.$$

Однак слід мати на увазі, що реальні складні системи мають різнорідні зв'язки як за природою, так і за способами реалізації. Одержано систему з $N+k$ рівнянь (27) та (30), що визначає $N+k$ змінних x_1, x_2, …, x_N; λ_1, λ_2, …, λ_k як функції від t. Таким чином, є можливість визначення руху кожного з тіл системи у деякому інтервалі часу, що містить t = 0, якщо відомі значення змінних x та $\dot{x}$ при t = 0.

Задача розв'язання рівнянь руху складних механічних систем нетривіальна та вимагає відомої винахідливості, що спирається на коректну математичну ідеалізацію зв'язків у відповідності з дійсною фізичною картиною.

Зазначивши кількість зв'язків у системі та способи з'єднання тіл, тим самим визначаємо структуру системи. Питання формалізації даного опису структури (САГ) вимагають самостійного дослідження [8-9]. У даному дослідженні розглянемо тільки ті зміни у рівняннях динаміки, які обумовлені принципами об'єднання елементів (пілотованих та безпілотних ЛА) в систему (спільну авіаційну групу). Якщо структуру системи представити у вигляді $n \times n$ матриці S з елементами S_{ij}, то рівняння руху системи n твердих тіл будуть мати вигляд

$$m_i\ddot{r}_i=F_i+\sum_{j=1}^{n} S_{ij}F_j, \tag{36}$$

$$\dot{G}_i=M_i+\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\left(Q_{ij}\times F_j+L_j\right),\ \ i=1,2,...,n,$$

де r_i – радіус-вектор центру мас тіла у інерційній системі координат;

$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}F_j$ – головний вектор внутрішньосистемних сил;

Q_{ij} – радіус-вектор точок прикладення внутрішньосистемних сил відносно центру мас i-го тіла (ЛА);

M_i – головний момент зовнішніх сил;

G_i – момент кількості руху i-го тіла (ЛА) відносно центру мас.

Одержані рівняння руху (спільної авіаційної групи пілотованої та безпілотної авіації) складні навіть для відносно простих систем. Їх складність значно зростає зі збільшенням числа тіл (ЛА), що входять до складу системи (САГ) [10].

Висновки

Безумовно, система запису (36) не є єдиною, можливо запропонувати інші форми представлення рівнянь механічних систем [2,7]. Уведення у (36) оператору S_{ij}, на відміну від (28), принципово змінює характер задачі, привносить у опис руху інформаційну складову [10]. Таким чином, задача управління системою тіл (спільною авіаційною групою пілотованої та безпілотної авіації) не може бути зведена до класичних задач механіки та її інформаційні аспекти найчастіше мають визначне значення. Вказаним аспектам, вочевидь, можна надати досить змістовне тлумачення з позицій загальної теорії систем, що є напрямом подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Парс А.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 635 с.

2. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Пер. с англ. в 2-х томах. Том 1/ Под ред. Ю.А. Архангельского и В.Г.Дёмина. – М.: Наука.

Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 464 с.

3. Коренев В.Г. Цель и приспособляемость движения. – М.: Наука, 1974. – 528 с.

4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. – 431 с.

5. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 250 с.

6. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 415 с.

7. Иванов В.А., Ситарский Ю.С. Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. – М.: Машиностроение, 1986. – 248 с.

8. Герасименко В.В., Артюшин Л.М., Коваль В.В. Метод формування спільної авіаційної групи. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. К.: НУОУ, 2021. – №1(40). – С. 63-68.

9. Герасименко В.В., Артюшин Л.М., Коваль В.В. Синтез раціональних структур бойових порядків спільних авіаційних груп пілотованої та безпілотної авіації. Journal of Scientific Papers "Social Development and Security", Vol. 11, No. 3, – 2021.

10. Герасименко В.В., Артющин Л.М., Лобанов А.А. Математична модель бойового порядку спільної авіаційної групи пілотованої та безпілотної авіації. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. К.: НУОУ, 2021. – №3(42). – С. 63-68.